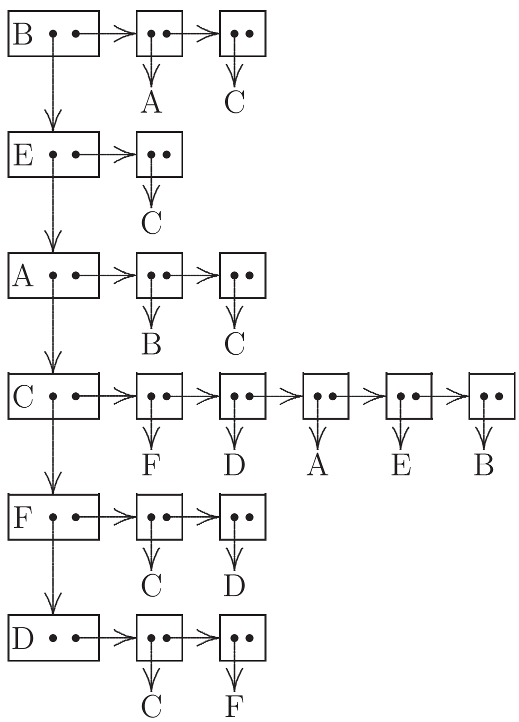
# 1. Grundbegriffe

- Allgemeiner Graph
  - Knotenmenge $V$ (nicht leer)
  - Linienmenge $L = E \cup A$ (Inzidentpunkte)
    $E$ Kanten (Inzidenzpunkte)
    $A$ Bögen (Startpunkt, Zielpunkt)
  - Schlingen, Mehrfachlinien, Mehrfachkanten, Mehrfachbögen
  - ungerichteter Graph, gerichteter Graph *(Digraph)*
  - Grad eines Knotens
  - Handschlaglemma: *Die Anzahl Knoten ungeraden Grades ist gerade.*
- Untergraph $H$: Untermenge von $V'$ von Knoten, Untermengen $E'$, $A'$ von Kanten und Bögen.
  - *Die Inzidenzpunkte der Linien müssen zu $V'$ gehören.*
  - $G[V']$ ist der von der Knotenmenge $V'$ erzeugte Untergraph von $G$.
    $G[L']$ ist der von der Linienmenge $L'$ erzeugte Untergraph von $G$.
- Orientierungsklassen. Umorientierung. Orientierung. Desorientierung. Vollständige Orientierung. Vollsändige Desorientierung.

# 2. Darstellungen

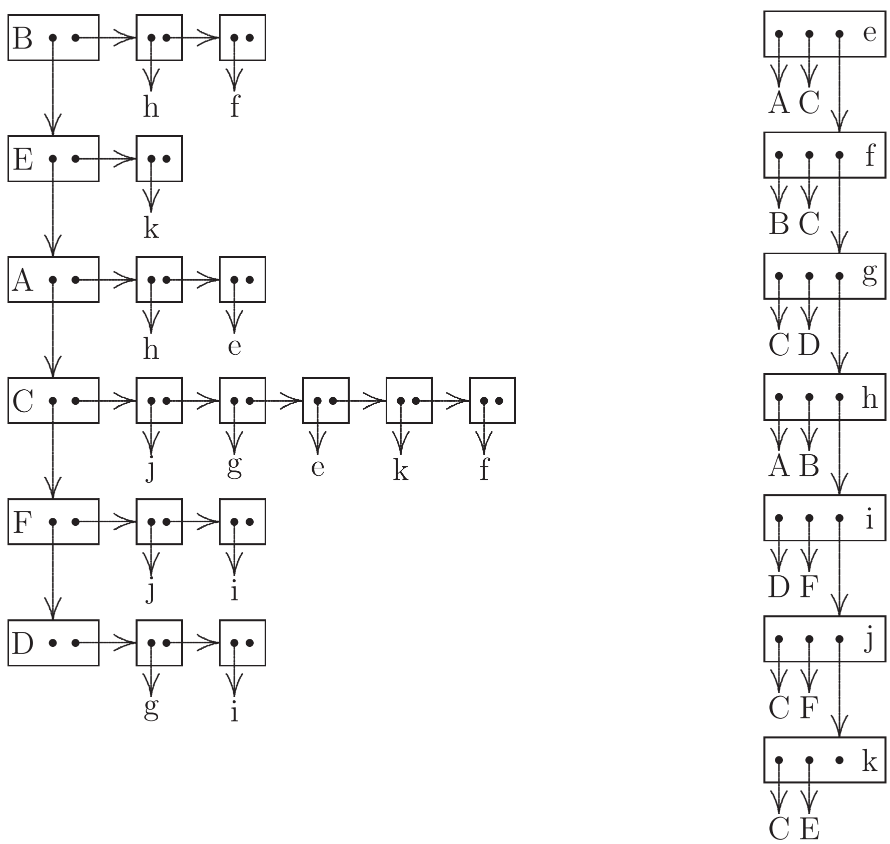
- Darstellung durch Matrizen
  - Adjazenzmatrizen (Zeilen: Knoten; Spalten: Knoten) quadratische Matrizen
  - Inzidenzmatrizen (Zeilen: Linien, Spalten: Knoten) Rechtecksmatrizen
- Darstellung durch Listen
  - Adjazenzlisten
  - Inzidenzlisten
- Listen oft durch Binärbäume realisiert

# 2. Darstellungen



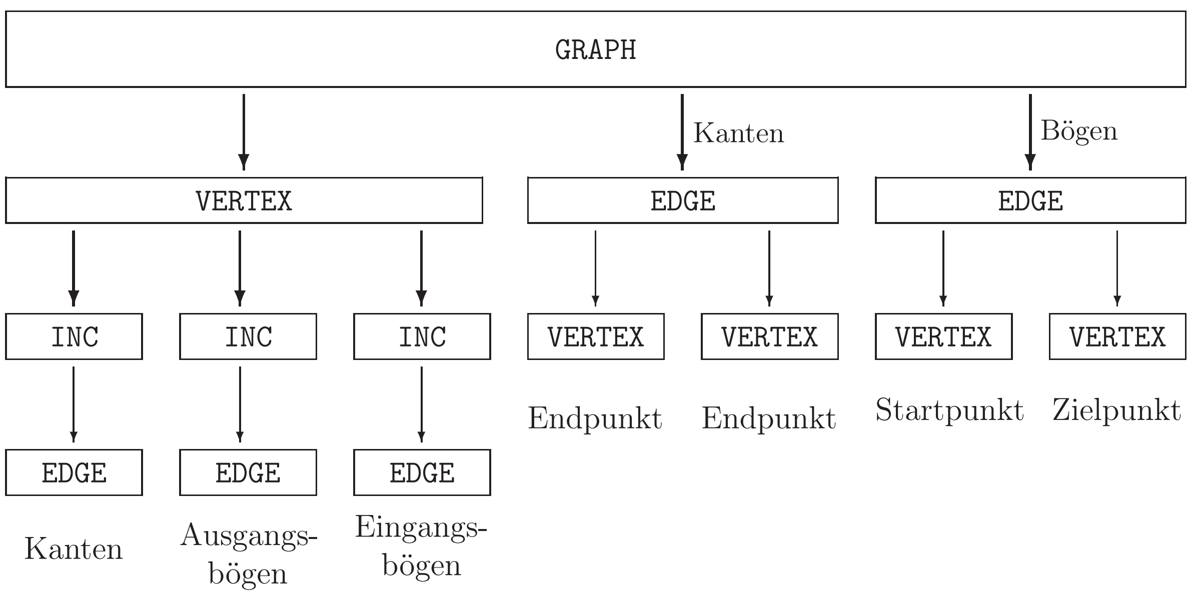

Adjazenlistendarstellung von Graph $G1$

# 2. Darstellungen




Inzidenzlistendarstellung von Graph $G1$

# 2. Darstellungen




**Schema für Graphdarstellungen durch Inzidenzlisten**

# 3. Wege und Zusammenhang

**a-Wege** (any)

$v_0, l_1, v_1, \ldots v_{n-1}, l_n, v_n$ mit $n \geq 1$
$l_i$ ist eine Linie.
$v_{i-1}$ ist ein Inzidenzpunkt von $l_i$; $v_i$ ist der andere Inzidenzpunkt.

**f-Wege** (forward)

Wie bei a-Wegen.
Zusätzlich: Ist $l_i$ ein Bogen, so ist $v_{i-1}$ sein Startpunkt und $v_i$ sein Zielpunkt.

**b-Wege** (backward)

Wie bei a-Wegen.
Zusätzlich: Ist $l_i$ ein Bogen, so ist $v_i$ sein Startpunkt und $v_{i-1}$ sein Zielpunkt.

**Wege haben *immer* eine Richtung, nämlich von $v_0$ nach $v_n$**

1. Offene Wege, geschlossenen Wege
2. Einfache Wege
3. Linieneinfache Wege

**Satz:** Alle offenen einfachen Wege sind linieneinfach. Mit einer einzigen Ausnahme sind alle geschlossenen einfachen Wege linieneinfach.

**Ausnahme:** Wege vom Typ $u, l, v, l, u$.

**a-Kreis:** Geschlossener einfacher und linieneinfacher a-Weg.

**f-Kreis:** Geschlossener einfacher und linieneinfacher f-Weg.

# 3. Wege und Zusammenhang

- a-Erreichbarkeit
- f-Erreichbarkeit
- b-Erreichbarkeit

Ein isolierter Knoten ist von keinem Knoten a-erreichbar.
Ein Knoten, der von sich selbst nicht f-erreichbar ist, heißt *Knoten ohne Rückkehr*.

**Satz:** a-Erreichbarkeit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der nicht isolierten Knoten.
*Gegenseitige* f-Erreichbarkeit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Knoten mit Rückkehr.

**Schwache Zusammenhangskomponenten**
Die Untergraphen, die durch die Äquivalenzklassen von a-Erreichbarkeit erzeugt werden.

**Starke Zusammenhangskomponenten**
Die Untergraphen, die durch die Äquivalenklassen gegenseitiger f-Erreichbarkeit erzeugt werden.

Jede starke Zusamenhangskomponente ist Untergraph einer schwachen Zusammenhangskomponente.

Jede Kante gehört zu einer starken Zusammenhangskomponente.

**Satz:** Ein allgemeiner Graph besitzt genau dann keine starken Zusammenhangskomponenten, wenn es ein f-kreisfreier Digraph ist.

**Dag (directed acyclic grapha):** Allgemeiner Graph ohne starke Zusammenhangskomponenten. Wird auch Präzedenzgraph genannt.

# 3. Wege und Zusammenhang

**Schnittpunkt:** Ein Knoten eines allgemeine Graphen ist ein Schnittpunkt, wenn seine Entfernung aus dem Graphen zusammen mit allen mit ihm inzidierenden Linien die Zahl der (eigentlichen oder uneigentlichen) schwachen Zusammenhangskomponenten erhöht.

**Satz:** Ein Knoten $v$ eines allgemeinen Graphen ist genau dann ein Schnittpunkt, wenn es Knoten $u$ und $w$ gibt, die von $v$ und untereinander verschieden sind und für die gilt:

1. Jeder a-Weg von $u$ nach $w$ führt über $v$ und
2. es gibt einen solchen a-Weg.

**Brücke:** Eine Brücke eines allgemeinen Graphen ist eine Linie, deren Entfernung aus dem Graphen die Zahl der (eigentlichen und uneigentlichen) schwachen Zusammenhangskomponenten erhöht.

**Satz:** Eine Linie eines allgemeinen Graphen ist genau dann eine Brücke, wenn sie auf einem a-Kreis liegt.

# 3. Wege und Zusammenhang

**Externer Dag:**

In einem schwach zusammenhängenden allgemeinen Graphen erzeugen die Bögen, die zu keiner starken Zusammenhangskomponente gehören, einen f-kreisfreien gerichteten Untergraphen. Er wird der *externe Dag* des allgemeinen Graphen genannt. Der externe Dag braucht nicht schwach zusammenhängend zu sein. Er kann auch ganz fehlen.

Alle Knoten ohne Rückkehr gehören zum externen Dag. Darüber hinaus kann es Knoten geben, die sowohl zum externen Dag als auch zu einer starken Zusammenhangskomponente gehören. Sie werden *schwache Verheftungspunkte* genannt.

*In einem schwach zusammenhängenden Graphen mit mehreren starken Zusammenhangskomponenten gibt es mindestens zwei schwache Verheftungspunkte.*

**Satz:** Jeder Bogen einer starken Zusammenhangskomponente liegt auf einem f-Kreis.

**Satz:** Eine starke Zusammenhangskomponente ist genau dann f-kreisfrei, wenn sie ungerichtet ist und keinen a-Kreis enthält.

**Satz:** Eine Kante einer starken Zusammenhangskomponente liegt genau dann auf einem f-Kreis, wenn sie auf einem a-Kreis liegt, der ganz in der starken Zusammenhangskomponente veräuft.

# 3. Wege und Zusammenhang

**Schichtennummern**

Es sei $C(v)$ die starke Komponente, zu der der Knoten $v$ gehört. Falls $v$ ein Knoten ohne Rückkehr ist, sei $C(v)$ der Untergraph der nur aus $v$ besteht.

**Satz:** Ist $C(u) \neq C(v)$ und $u$ von $v$ f-erreichbar, dann sind alle $u' \in C(u)$ von allen $v' \in C(v)$ f-erreichbar und kein $v' \in C(v)$ ist von irgendeinem $u' \in C(u)$ f-erreichbar.

Damit läßt sich durch

$$C(v) \prec C(u) := C(v) \neq C(u) \text{ und } u \text{ ist von } v \text{ f-erreichbar}$$

eine strikte partielle Ordnung auf der Menge der Klassen $C(x)$ definieren.

Wie bei allen strikt partiell geordneten endlichen Mengen, läßt sich auch auf den Klassen $C(x)$ eine Nummer definieren, die mit der Ordnung verträglich ist. Diese Nummer soll *Schichtenummer* heißen und wird mit $\mathrm{lv}(C(v))$ bezeichnet:

1. Hat $C(v)$ bezüglich $\prec$ keine Vorgänger, so wird $\mathrm{lv}(C(v)) := 0$ gesetzt.
2. Sind alle Vorgänger von $C(v)$ nummeriert, so wird $\mathrm{lv}(C(v)) := \left(\max_{C(u) \prec C(v)} \mathrm{lv}(C(u))\right) + 1$ gesetzt.

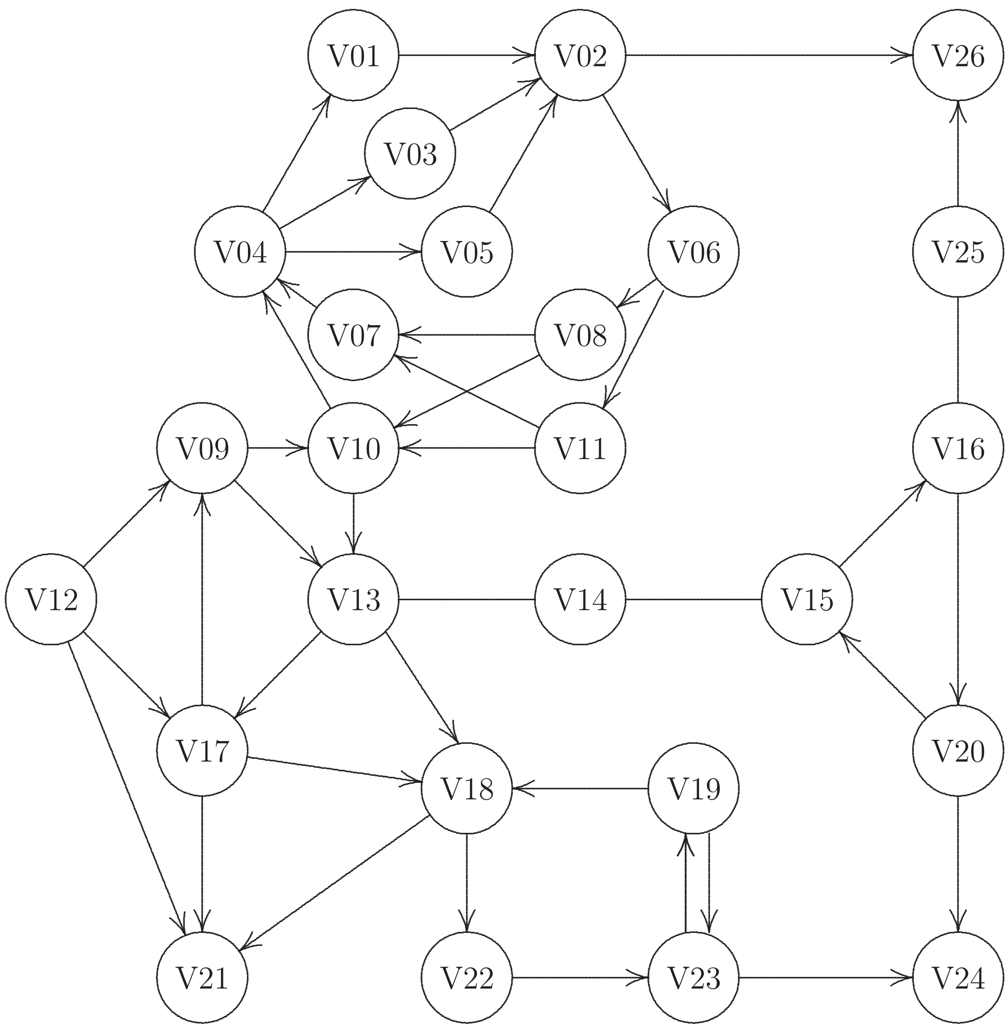
Allen Knoten einer Klasse wird die Schichtennummer der Klasse zugeteilt.

Eine Klasse heißt *Anfangselement*, wenn sie keine Vorgänger hat. Sie heißt *Endelement*, wenn sie keine Nachfolger hat. Anfangselemente haben die Schichtennummer 0, Endelemente haben i.a. verschiedene Schichtenummern.

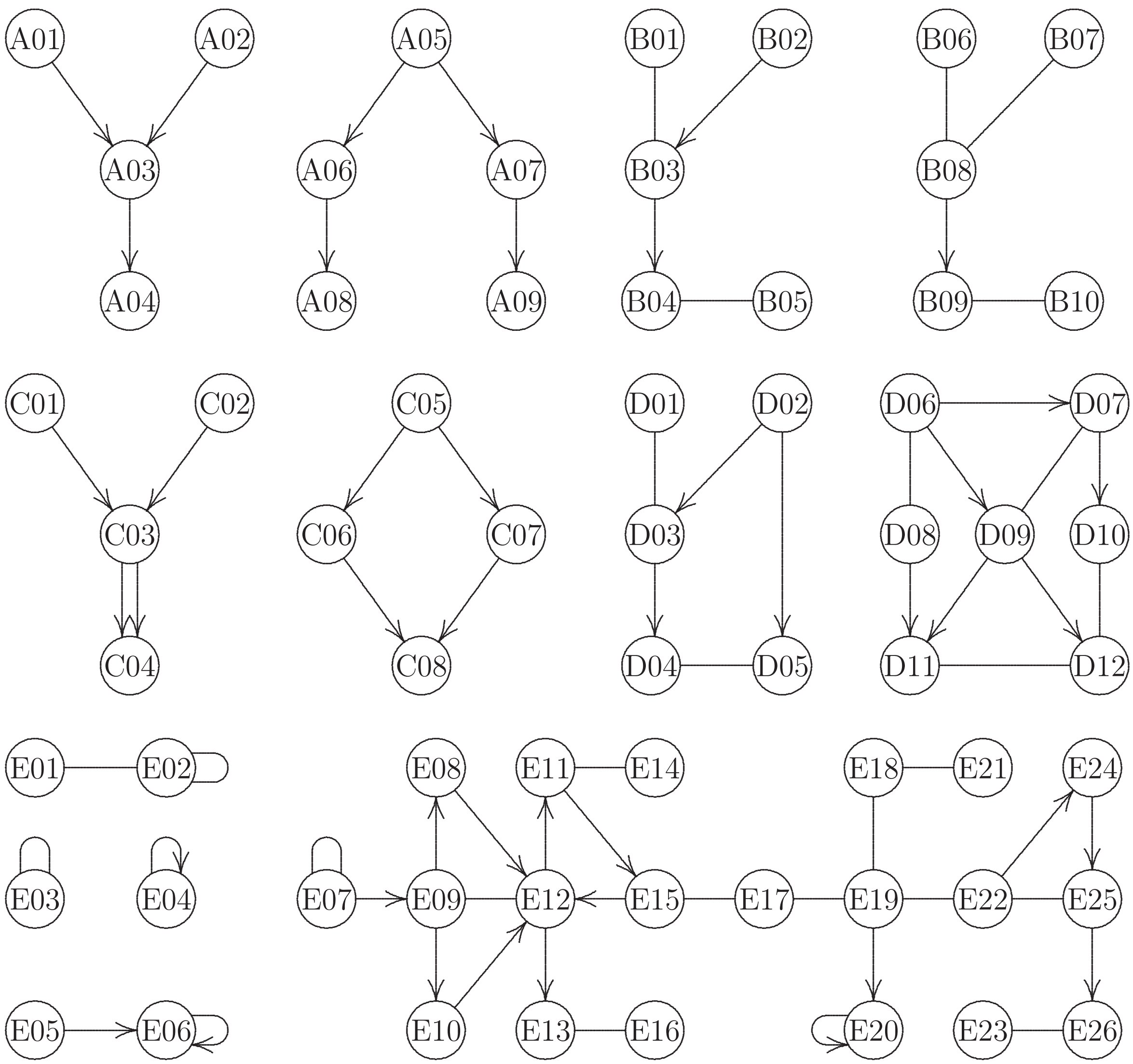
Die Schichtennummer entspricht der maximalen Länge einer Vorgängerkette.

**Satz:** 1. Beim Durchlaufen eines f-Weges kann die Schichtennummer nicht fallen. Sie wächst genau dann, wenn ein Bogen des externen Dags durchlaufen wird.
2. Beim Durchlaufen eines a-Weges ändert sich die Schichtennummer genau dann, wenn ein Bogen des externen Dags durchlaufen wird. Sie wächst, wenn der Bogen in f-Richtung durchlaufen wird. Sie fällt, wenn der Bogen in b-Richtung durchlaufen wird.

# 3. Wege und Zusammenhang



# 3. Wege und Zusammenhang



# 4. Tiefensuche und Breitensuche

**Tiefensuche**

***f-DFS(v)***

```
if (v markiert) return;
markiere v;
setze v aktiv;
for (alle Kanten und Ausgangsbögen l, die mit v inzidieren)
    { if (l nicht markiert)
        { markiere l;
          f-DFS(otherend(l, v));
    }   }
setze v inaktiv;
return;
```

**f-DFSgesamt(v)**

```
for (alle Knoten v aus V)   /* Knotenliste */
    { if (v nicht markiert)
        { f-DFS(v);
    }   }
```

a-DFS, a-DFSgesamt

b-DFS, b-DFSgesamt

# 4. Tiefensuche und Breitensuche

**Breitensuche**

***f-BFS(v)***

```
enqueue(v);
markiere v;
while (Warteschlange nicht leer)
   { u = dequeue;
     for (alle Kanten und Ausgangsbögen l von u)
        { if (l markiert) return;
          markiere l;
          w = otherend(l, u);
          if (nicht markiert w)
             { enqueue(w);
               markiere w;
   }    }    };
```

**f-BFSgesamt**

```
               /* Anfangs sind alle Knoten */
               /* und alle Kanten unmarkiert */
for (alle Knoten v aus V)    /* Knotenliste */
    { if (v unmarkiert)
         { f-BFS(v);
    }    };
```

a-BFS, a-BFSgesamt

b-BFS, b-BFSgesamt

# 4. Tiefensuche und Breitensuche

**Satz:** Es sei $v$ ein Knoten eines allgemeinen Graphen. Sind anfangs alle Knoten unmarkiert, so besucht f-DFS den Knoten $v$ und alle von $v$ f-erreichbaren Knoten und nur diese.

**Satz:** Es sei $v$ ein unmarkierter Knoten eines allgemeinen Graphen, dann werden mit f-DFS alle von $v$ f-erreichbaren Knoten besucht, zu denen es zum Aufrufszeitpunkt einen f-Weg aus unmarkierten Knoten gibt, und nur diese.

**Tiefensuchbäume**

- Baumbogen
- Rückwärtsbogen
- Vorwärtsbogen
- Querbogen

**Satz:** Es sei $v$ ein Knoten eines allgemeinen Graphen. Sind anfangs alle Knoten unmarkiert, so bilden die Baumbögen von f-DFS (a-DFS, b-DFS) einen gerichteten Baum mit Wurzel $v$.

**Tiefensuchwald.**
Wird ausgehend von einem ersten Knoten $v$ ein Tiefensuchbaum aufgebaut, so kann es Knoten geben, die dabei nicht erreicht werden. Beginnend mit einem solchen Knoten $u$ wird ein zusätzlicher Tiefensuchbaum aufgebaut und so fort. Es wird so der zum Ablauf der Tiefensuche gehörende *Tiefensuchwald* bestimmt. Bei a-Tiefensuche erezugen die Tiefensuchbäume die schwachen Zusammenhangskomponenten des Graphen. Bei f-Tiefensuche und b-Tiefensuche kann es sein, das von einem Tiefensuchbaum zu einem vorher gefundenen ein Bogen geht. Das ist ein *Querbogen*. Einen solchen rechnen wir zu keinem Tiefensuchbaum.

# 4. Tiefensuche und Breitensuche

**Satz:**

- Bei Ablauf einer f-Tiefensuche (a-Tiefensiuche) schließt jeder Rückwärtsbogen einen f-Kreis (a-Kreis) durch Start- und Zielpunkt des Bogens.
- Eine Kante kann niemals Vorwärtsbogen oder Querbogen sein.
- Bei a-Tiefensuche gibt es keine Vorwärtsbögen und keine Querbögen.

**Satz:**

- Ein allgemeiner Graph besitzt genau dann eine a-Kreis, wenn jeder Ablauf einer a-Tiefensuche einen Rückwärtsbogen findet.
- Ein Digraph besitzt genau dann einen f-Kreis, wenn jeder Ablauf einer f-Tiefensuche einen Rückwärtsbogen findet.
- Ein stark zusammenhängender allgemeiner Graph besitzt genau dann einen f-Kreis, wenn jeder Ablauf einer f-Tiefensuche einen markierten Knoten trifft.